BİRİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM

• $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olmak üzere,

$$ax + by + c = 0$$

şeklindeki eşitliklere birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem denir. Bu denklemin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır ve düzlemde doğru belirtir.

DOĞRUSAL (LİNEER) DENKLEM SİSTEMİ

• Birinci dereceden iki bilinmeyenli en az iki denklemden oluşur.

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right\} a, b, c, d, e, f \in R$$

• İki bilinmeyenli denklemi (x, y), üç bilinmeyenli denklemi (x, y, z) sağlar.

• Denklem sistemlerinin çözüm kümesi bulunurken yok etme yöntemi kullanılabilir.

DENKLEM SİSTEMİ ÇÖZÜM KÜMESİ

$$dx + ey + f = 0$$

1. $\frac{a}{} \neq \frac{b}{}$ ise sistemin çözüm kümesi bir elemanlıdır.

2. — — — ise sistemin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

3. $\frac{}{d} = \frac{}{e} \neq \frac{}{f}$ ise sistemin çözüm kümesi boş kümedir.

KÖKLERİN VARLIĞI

$ax^2 + bx + c = 0$ denklemi için, $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere,

i) $\Delta > 0$ ise denklemin farklı iki gerçek kökü vardır.

ii) $\Delta = 0$ ise denklemin çakışık (eşit) iki kökü vardır.

iii) $\Delta < 0$ ise denklemin gerçel sayılarda kökü yoktur.

• Soruda denklemin iki gerçel kökü var diyorsa $\Delta \geq 0$ dır.

KÖKLERİN İŞARETİ

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ile x_2 ve $x_1 < x_2$ olsun.

$$x_1 \cdot x_2 < 0 \text{ ve } \begin{cases} \text{i) } x_1 + x_2 < 0 \text{ ise } |x_1| > |x_2| \\ \text{ii) } x_1 + x_2 > 0 \text{ ise } |x_1| < |x_2| \\ \text{iii) } x_1 + x_2 = 0 \text{ ise } x_1 = -x_2 \end{cases}$$

• $x_1 + x_2 = 0$ ise simetrik iki kökü vardır yani $x_1 \cdot x_2 < 0$ dır. $\frac{c}{} < 0$ dır.

• $\Delta \geq 0$ iken $x_1 \cdot x_2 = 0$ ise denklemin köklerinden ____ si sıfırdır.

i) $x_1 + x_2 > 0$ ise diğer kök pozitiftir.

ii) $x_1 + x_2 < 0$ ise diğer kök negatiftir.

iii) $x_1 + x_2 = 0$ ise her iki kök de sıfırdır.

İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER

$f(x) = \dfrac{P(x) \cdot Q(x)}{R(x)}$ şeklinde verilen f(x) fonksiyonunun işareti incelenirken,

i) P(x), Q(x) ve R(x) in sıfırları (kökleri) bulunur.

ii) Bulunan kökler sırasıyla tabloda gösterilir. Çift kat kök işaretlenir.

iii) Her polinomun en büyük dereceli terimlerinin işaretleri çarpılır, en büyük kökün sağına f(x)'in işareti olarak yazılır.

iv) Her kökte işaret değiştirerek (çift kat kökte işaret değişmez) sola doğru tablo doldurulur.

v) Paydayı sıfır yapan değerler çözüm kümesine dahil edilmez.

$f(x) = \dfrac{(x-a)^2 (x-b)}{(x-c)}$ ve a<b<0<c olsun.

x		a		b		c	
f(x)	+		+		−	ϕ	+

İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİK SİSTEMİ

Bu tip soruları bir örnek üzerinden özetleyelim:

$$x^2 + x - 6 \leq 0$$
$$x^2 - x - 6 < 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

x		−3		−2		2		3	
$x^2 + x - 6$	+								+
$x^2 - x - 6$	+								+
Sonuç	+								+

ÇK = (–2, 2] dır.

İKİNCİ DERECEYE DÖNÜŞTÜRÜLEBİLEN DENKLEMLER

• $P(x) \cdot Q(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi için $P(x) = 0$ veya $Q(x) = 0$ bulunur.

• $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ denkleminde $P(x) = 0$ ve $Q(x) \neq 0$ bulunur.

Paydayı sıfır yapan değerler varsa (paydanın kökleri) payın köklerinden çıkartılır.

• $\dfrac{P(x) \cdot Q(x)}{T(x)} = 0$ ise $P(x) = 0$ veya $Q(x) = 0$, $T(x) \neq 0$ dır.

• $a, b, c \in R$ olmak üzere, $ax^4 + bx^2 + c = 0$ denkleminde $x^2 = t$ dönüşümü uygulanır.

• $a, b \in R$ olmak üzere,

$\dfrac{x}{x+a} + \dfrac{x+a}{x} + b = 0$ denkleminde

$\dfrac{x}{x+a} = t$ dönüşümü uygulanır.

• $a^{2x} + b \cdot a^x + c = 0$ denkleminde, $a^x = t$ dönüşümü uygulanır.

• Köklü denklemlerde, köklü ifade eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılarak kökten kurtulmaya çalışılır. Denklemi sağlayan değerler bulunduktan sonra ilk denklemde yerine yazılarak denenmelidir. Sağlamayan değerler çözüm kümesinden çıkarılmalıdır.

• P(x), reel katsayılı polinom ve $n \in N^+$ için,

a) $\sqrt[2n]{P(x)}$ ifadesi $P(x) \geq 0$ şartını sağlayan x değerleri için tanımlıdır.

b) $\sqrt[2n+1]{P(x)}$ ifadesi $\forall x \in R$ için tanımlıdır.

• $x \geq 0$ için $|x| = x$ ve $x \leq 0$ için $|x| = -x$ dir.

• $a, b \in R$ olmak üzere, $|ax + b| = 0$ ifadesinin kritik noktası

$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ dır.

İKİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMLERİ

• $ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f = 0$

$mx^2 + ny^2 + px + qy + rxy + s = 0$

denklem sistemi 2. dereceden iki bilinmeyenlidir.

Çözüm kümesini bulmak için yok etme yöntemi veya yerine koyma yöntemi kullanılır.

AÇI ÖLÇÜ BİRİMLERİ

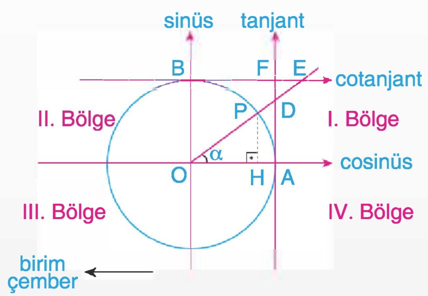
Birim çemberin 360 ta birini gören merkez açıya 1 derece; yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açıya 1 radyan denir.

1 derece 60 dakikaya, 1 dakika 60 saniyeye eşittir. Ayrıca $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ dir.

ESAS ÖLÇÜ

Derece türünden verilen açı pozitif ise açı 360 a bölünür kalan esas ölçüdür. Açı negatifse pozitifmiş gibi işlem yapılır. Bulunan sonuç 360 dan çıkarılır.

Radyan türünden verilen açı pozitifse pay, paydanın iki katına bölünür. Bulunan kalan ilk pay da yazılarak esas ölçü bulunur. Açı negatif ise pozitif gibi işlem yapılır. Bulunan değer 2π den çıkarıldığında esas ölçü bulunmuş olur.



$|OA| = 1$ ve $|OB| = 1$ olmak üzere,

$|PH| = \sin\alpha$ $|AD| = \tan\alpha$

$|OH| = \cos\alpha$ $|BE| = \cot\alpha$

BUNLARI UNUTMA!

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
   dolayısıyla $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$
   $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

2. Tanımlı olduğu değerler için
   $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ dolayısıyla $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$
   $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$

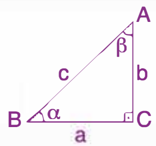
3. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

5. $x + y = 90° = \frac{\pi}{2}$ ise $\sin x = \cos y$ $\tan x = \cot y$
   $\cos x = \sin y$ $\cot x = \tan y$

6. $-1 \le \sin x \le 1$, $-\infty < \tan x < \infty$
   $-1 \le \cos x \le 1$, $-\infty < \cot x < \infty$

DİK ÜÇGENDE TRİGONOMETRİ



$\sin = \frac{\text{karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{hipotenüs uzunluğu}}$

$\cos = \frac{\text{komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{hipotenüs uzunluğu}}$

$\tan = \frac{\text{karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{komşu dik kenar uzunluğu}}$

$\cot = \frac{\text{komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{karşı dik kenar uzunluğu}}$

$\sin\alpha = \frac{b}{c}$ $\sin\beta = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\beta = \frac{b}{c}$

$\tan\alpha = \frac{b}{a}$ $\tan\beta = \frac{a}{b}$ $\cot\alpha = \frac{a}{b}$ $\cot\beta = \frac{b}{a}$

- 0 dan 90 a doğru gidildikçe sinüs ve tanjant değeri artar, cosinüs ve cotanjant değeri azalır.
- Sinüs, tanjant ve cotanjant tek fonksiyondur.
- Cosinüs çift fonksiyondur.

fonk \ α	0	30	45	60	90
sinα	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tanα	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tanımsız
cotα	tanımsız	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

I. BÖLGE

$\sin(90-\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos(90-\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan(90-\alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$

$\cot(90-\alpha) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

fonk \ α	120	135	150	180
sinα	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
cosα	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tanα	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0
cotα	$-1/\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	tanımsız

II. BÖLGE

$\sin(180-\alpha) = \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(180-\alpha) = \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(180-\alpha) = \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(180-\alpha) = \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

$\sin(90+\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos(90+\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$

$\tan(90+\alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$

$\cos(90+\alpha) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$

	210	225	240	270
sinα	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
cosα	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0
tanα	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tanımsız
cotα	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

III. BÖLGE

$\sin(180 + \alpha) = \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(180 + \alpha) = \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(180 + \alpha) = \tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$

$\cot(180 + \alpha) = \cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$

$\sin(270 - \alpha) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$

$\cos(270 - \alpha) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$

$\tan(270 - \alpha) = \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$

$\cot(270 - \alpha) = \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

fonk				
	$\sqrt{\ }\,/$	$\sqrt{\ }\,/$	$/$	
	$/$	$\sqrt{\ }\,/$	$\sqrt{\ }\,/$	
	$\sqrt{\ }$		$/\sqrt{\ }$	
	$/\sqrt{\ }$		$\sqrt{\ }$	

IV. BÖLGE

$\sin(360-\alpha) = \sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(360-\alpha) = \cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(360-\alpha) = \tan(2\pi-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(360-\alpha) = \cot(2\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

$\sin(270+\alpha) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$

$\cos(270+\alpha) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan(270+\alpha) = \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$

$\cot(270+\alpha) = \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$

PERİYOT

f : R→ R bir fonksiyon
∀x∈R için f(x + T) = f(x) olacak şekilde bir T sayısı varsa en küçük T sayısına fonksiyonun esas periyodu denir.

$y = f(cx)$ ise periyot $\frac{T}{|c|}$

$y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ ise periyot $|c| \cdot T$ dir.

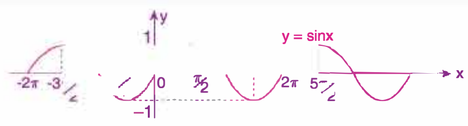
Trigonometrik fonksiyonlarda

$$\left.\begin{matrix}\sin^m(ax+b)\\ \cos^m(ax+b)\end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|a|}, & m \text{ tek ise} \\ T = \frac{\pi}{|a|}, & m \text{ çift ise}\end{cases}$$

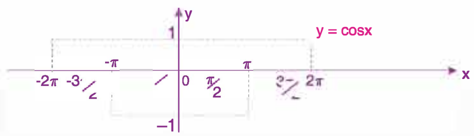
$$\left.\begin{matrix}\tan^m(ax+b)\\ \cot^m(ax+b)\end{matrix}\right. \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|} \text{ dır.}$$

GRAFİKLER

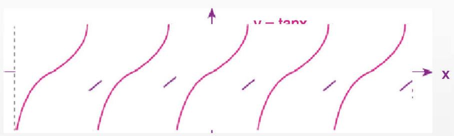
1.



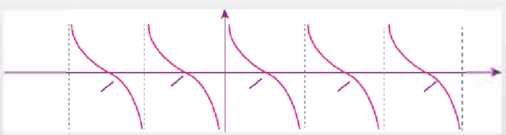
2.



3.



4.



TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Fonksiyonların tersinin de fonksiyon olması için birebir ve örten olması gerekir. Ancak trigonometrik fonksiyonlar periyodik olduğu için birebir değildir. Dolayısıyla sınırlamak gerekir.

$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \Rightarrow \arcsin: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin x = y \Leftrightarrow \arcsin y = x$

$\cos: [0, \pi] \to [-1, 1] \Rightarrow \arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\cos x = y \Leftrightarrow \arccos y = x$

$\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R \Rightarrow \arctan: R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

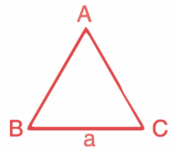
$\tan x = y \Leftrightarrow \arctan y = x$

$\cot: (0, \pi) \to R \Rightarrow \operatorname{arccot}: R \to (0, \pi)$

$\cot x = y \Leftrightarrow \operatorname{arccot} y = x$

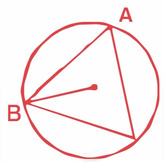
TEOREMLER

1. Cosinüs Teoremi



$a^2 = b^2+c^2 - 2bc\cdot\cos\widehat{A}$
$b^2 = a^2+c^2 - 2ac\cdot\cos\widehat{B}$
$c^2 = a^2+b^2 - 2ba\cdot\cos\widehat{C}$

1. Sinüs Teoremi



$\frac{a}{\ } \quad \frac{b}{\ } \quad \frac{c}{\ } = 2R$

$A(ABC) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin C$

$= \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot \sin B$

$= \frac{1}{\ }\cdot a\cdot b\cdot \sin C$

$= \frac{\ }{4R}$

TOPLAM FARK FORMÜLLERİ

$\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b$
$\sin(a-b) = \sin a\cdot\cos b - \cos a\cdot\sin b$
$\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b$
$\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b$

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\cdot\tan b}$

$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\cdot\tan b}$

cotanjant formüllerini tanjanttan çıkarabilirsiniz.

YARIM AÇI FORMÜLLERİ

$\sin 2a = 2\sin a\cdot\cos a \Rightarrow \sin a\cdot\cos a = \frac{\sin 2a}{2}$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
$= 2\cos^2 a - 1$
$= 1 - 2\sin^2 a$

$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

1.

$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{veya} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$ $\quad \cos x = \cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{veya} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$

$\left.\begin{matrix}\tan x = \tan\alpha \\ \cot x = \cot\alpha\end{matrix}\right\} \to x = \alpha + k\pi$

2. Doğrusal Denklemler

$a\sin x + b\cos x = c$ denkleminde $a^2 + b^2 < c^2 \Rightarrow ÇK = \varnothing$

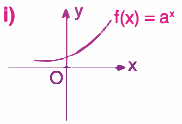
$a^2 + b^2 \geq c^2 \Rightarrow \sin x + \frac{b}{a}\cdot\cos x = \frac{c}{a}$ ifadesinde $\frac{b}{a} = \tan\alpha$ kabul edilir. Daha sonra toplam – fark formülleri yardımıyla çözüm bulunur.

3. Homojen Denklem

1. $a\sin x + b\cos x = 0$ ifadesinde $\tan x = -\frac{b}{a}$ denklemi çözülür.
2. $a\sin^2 x + b\sin x\cdot\cos^2 x = 0$ denkleminde her iki taraf $\cos^2 x$ e bölünerek $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$ formatına dönüştürülerek II. dereceden denkleme dönüştürülüp çözüm bulunur.

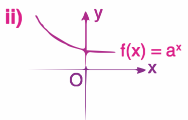
ÜSTEL FONKSİYON

i)



a > 1 ve f(x) artandır.

ii)



0 < a < 1 ve f(x) azalandır.

LOGARİTMA FONKSİYONUN TANIM KÜMESİ

- $f(x) = \log_{g(x)} h(x)$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için;

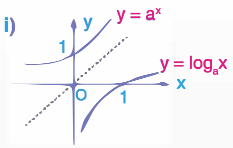
i) $g(x) > 0$ ve $g(x) \neq 1$

ii) $h(x) > 0$ olmalıdır.

LOGARİTMA FONKSİYONU

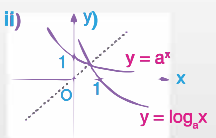
- f: $R \to R^+$, $f(x) = a^x$ ve a>0, $a \neq 1$ fonksiyonunun tersi olan fonksiyona <u>a tabanında logaritma fonksiyonu</u> denir.
  $y = a^x$ in tersi $\log_a x$ dir.
- $y = \log_a x$ in grafiği $y = a^x$ in grafiğinin y = x doğrusuna göre simetriğidir.

i)



a > 1 ve f(x) artandır.

ii)



0 < a < 1 ve f(x) azalandır.

BİR SAYININ ONLUK LOGARİTMASININ TAM KISMI

ÜSTEL VE LOGARİTMİK DENKLEMLER

- $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ dir.
- Logaritmik ve üstel denklemlerin çözümündeki kökler verilen denklemleri sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.

ÜSTEL VE LOGARİTMİK EŞİTSİZLİKLER

- $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ eşitsizliğinde

i) $0 < a < 1$ ise $f(x) > g(x)$ tir.

ii) $a > 1$ ise $f(x) < g(x)$ tir.

- a, b $\in R^+$, $a \neq 1$ olmak üzere, $\log_a f(x) < b$ eşitsizliğinde

i) $0 < a < 1$ ise $f(x) > a^b$ ve $f(x) > 0$

ii) $a > 1$ ise $f(x) < a^b$ ve $f(x) > 0$ dır.

LOGARİTMA FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ

- Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna onluk logaritma denir.
  $\log_{10} x = \log x$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 0 = 1$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a b$
- $\log 10 = 1$ dir.

$\log(5 \cdot 2) = \log 2 + \log 5 = 1$

$\log 2 = 1 - \log 5$

- $a^{\log_a b} = b$
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$

LOGARİTMANIN TERSİ

$f(x) = \log_a x$ ise $f^{-1}(x) = a^x$ dir.

LOGARİTMA UYGULAMALARI

Bileşik Faiz Formülü

[illegible] 100)

A = Ana para

n = faiz yüzdesi

t = yıl (süre)

<u>Richter Ölçeği</u>

Deprem büyüklüğü Richter ölçeği ile ölçülür.

1 mikron = 10^{-3} mm dir.

Milimetre cinsinden depremin genliği verildiğinde, önce mikrona çevrilir. Daha sonra onluk logaritması alınır.

Sonuç Richter ölçeğine göre depremin büyüklüğünü verir.

GERÇEL SAYI DİZİLERİ

- $f: N^+ \longrightarrow R$, $f(n) = a_n$

fonksiyonu pozitif doğal sayılardan gerçel sayılar kümesine tanımlanmıştır.

Bu fonksiyona gerçel sayı dizisi ya da kısaca dizi denir.

- $f(n) = (a_n) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$

dizisinde a_1 birinci terim a_n genel terimidir.

- Bir dizinin bir kaç terimi verilmiş olsa dahi genel terim verilmemişse dizi belirtmez.

$a_n = \{1, 2, 3, \dots\} \longrightarrow$ dizi belirtmez.

$a_n = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \longrightarrow$ dizi belirtir.

DİZİ ÇEŞİTLERİ

- $k \in N^+$ olmak üzere, tanım kümesi k ya kadar olan diziler sonlu dizidir.
- Bütün terimleri birbirine eşit olan diziye sabit dizi denir.

i) $a_n = (an^2 + bn + c)$ sabit dizi ise,

$a = b = 0$ dır yani $a_n = c$ dir.

ii) ((——) sabit dizi ise,

c d

- $\forall n \in N^+$ için $a_n = b_n$ ise diziler eşittir. Dizilerin eşit olması için kurallarının eşit olması gerekmez, elemanlarının aynı olması yeterlidir.
- Bir terimi kendinden önceki terimler cinsinden tanımlanan dizilere indirgemeli dizi denir.
- $(a_n) = (an^2 + bn + c)$ şeklinde verilmişse en büyük ve en küçük terimi parabol sorularındaki gibi tepe noktası kullanılarak çözülebilir.

ÜÇGEN SAYI VE KARE SAYI

- $n \in N^+$ olmak üzere, $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ şeklinde yazılabilen sayılara üçgen sayılar denir.
- Ardışık iki üçgen sayının toplamına kare sayı denir.

FIBONACCI DİZİSİ

- Her terimi kendisinden önce gelen iki teriminin toplamı şeklinde yazılabilen dizilere Fibonacci dizisi denir.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

ARİTMETİK DİZİ VE ÖZELLİKLERİ

- Ardışık iki terimi arasındaki fark birbirine eşit dizilere aritmetik dizi denir.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ ifadesi genel terimdir.

- $p < n$ iken $a_n = a_p + (n-p) \cdot d$
- İlk n teriminin toplamı S_n olmak üzere,

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

- Bir aritmetik dizide herhangi bir terim, bu terimden eşit uzaklıktaki iki terimin aritmetik ortalamasına eşittir.

k<p iken $a_p = \frac{a_{p-k} + a_{p+k}}{2}$

- $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$ dir.

GEOMETRİK DİZİ VE ÖZELLKLERİ

- Ardışık terimleri arasındaki oran sabit olan dizilere geometrik dizi denir.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ ifadesi geometrik dizinin genel terimidir.

- k<n olmak üzere $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ dir.
- İlk n teriminin toplamı S_n olmak üzere,

$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$ dir. ($r \neq 1$)

- Bir geometrik dizide herhangi bir terim, bu terimden eşit uzaklıktaki iki terimin geometrik ortalamasına eşittir.

k<p iken $a_p = \sqrt{}$ dir.

- $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \dots$ dir.

SERİLER

- $S_n = 1 + r^1 + r^2 + r^3 + \dots + r^n$ için

i) $r \geq 1$ ise S_n sınırsız büyür.

ii) $0 \leq r < 1$ ise S_n bir gerçel sayıya yaklaşır.

- $S_n = 1 + r^1 + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

LİMİT

f: R → R ya da f: R - {a} → R tanımlı f(x) fonksiyonunda, (L∈R)

- f(x) in x = a noktasında sol limiti L ise,

  $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ dir.

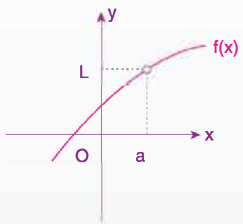
- f(x) in x = a noktasında sağ limiti L ise,

  $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ dir.

- f(x) in x = a noktasında limiti L ise sağ limit, sol limite eşittir.

  $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$ dir.

1. f(x) in x = a noktasında limitinin olması için f(x) in x = a da tanımlı olması şart değildir.

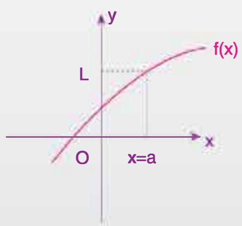


$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

f(a) = tanımsız

2. f(x) in x = a noktasındaki limiti f(a) değerine eşit ise f(x) x = a noktasında süreklidir. Limit hesaplamak yerine f(a) değerini bulmak yeterlidir.



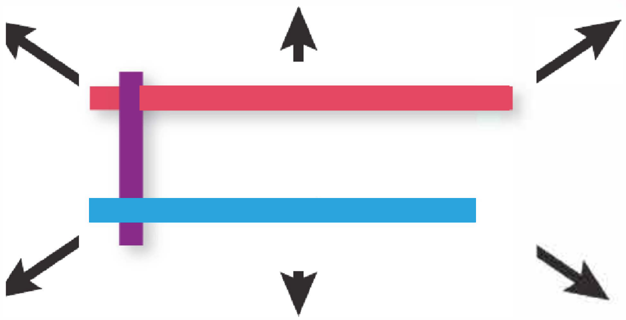
$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = L$ dir.

LİMİT KURALLARI

- $\lim_{x \to a} x = a$ (Sürekli fonksiyonlarda yerine yazarız.)
- $\lim_{x \to a} c = c$ (Sabit fonksiyon)
- $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(\quad + a)}{\quad)} = 2a$

Bir fonksiyonunun limitinin bir noktada var olması için o noktada tanımlı olma zorunluluğu yoktur.

- f(x) fonksiyonun x = a da limiti bulunurken önce fonksiyonda x = a yazılır, (belirsizlik yoksa) fonksiyon sürekli ise limit değeri kolayca bulunur.



Polinom fonksiyonları tüm gerçel sayılarda süreklidir. Dolayısıyla bu fonksiyonların herhangi bir noktadaki ilimiti fonksiyonun o noktadaki değerine eşittir.

PARÇALI FONKSİYONDA LİMİT

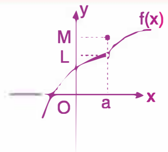
- Fonksiyonun tanım kümesine dikkat edilir. Paydayı sıfır yapan değerler ve fonksiyonunun kuralının değiştiği x değerleri kritik noktalardır.
- Kritik noktalarda limit için sağ ve sol limite bakılmalıdır.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{x-3}, & x < 2 \\ x - 9, & x > 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 2} f(x) = -7$ dir. Çünkü, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x - 9) = -7$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x+5}{x-3} = -7$

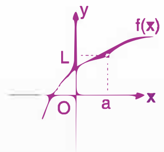
GRAFİKTE LİMİT



$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

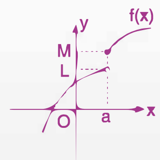
$\lim_{x \to a} f(x) = L$

f(a) = M



$\lim_{x \to a} f(x) = L$

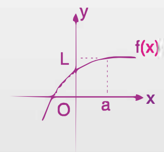
f(a) = tanımsız



$\lim_{x \to a^+} f(x) = M$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

$\lim_{x \to a} f(x)$ = yoktur

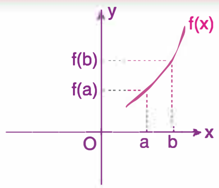


$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

$\lim_{x \to a} f(x) = L = f(a)$

x = a da f(x) süreklidir.

DEĞİŞİM ORANI



$y = f(x)$ fonksiyonunda $(a, f(a))$ değerinden $(b, f(b))$ değerine geçişte yaşanan

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ifadesine f fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki değişimi denir.

- Anlık değişim $x = x_0$ noktasından geçen doğrunun eğimidir.
- $x = x_0$ noktasındaki anlık değişim oranı f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevidir.

TÜREVİN TANIMI

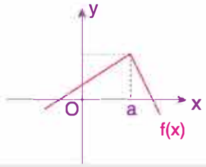
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$
- $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'$

- f(x) in $x = a$ noktasında türevinin olması için;

i) $x = a$ noktasında sürekli olmalıdır.

ii) sağ türev sol türeve eşit olmalıdır.

- Sivri uçta türev yoktur.



f(x) in $x = a$ da türevi yoktur.

TÜREV VE SÜREKLİLİK

TÜREVİN FİZİKSEL YORUMU

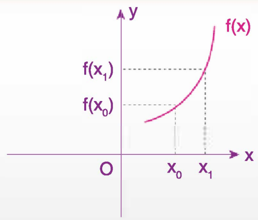
MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ

Mutlak değerin içini sıfır yapan değerler kritik noktalardır.

i) x_0 kritik nokta ise mutlak değerin içini sıfır yapan x_0 bir katlı kök ise türev yoktur, birden çok katlı kök ise türev vardır ve sıfıra eşittir.

ii) x_0 kritik nokta değil ise fonksiyonun işaretinin durumuna göre mutlak değerden kurtarılarak türev alınır.

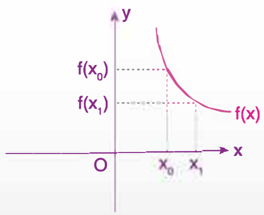
ARTAN FONKSİYON



Yandaki şekildeki gibi, artan x değerlerine karşılık f(x) in aldığı değerler de artıyorsa fonksiyon artandır.

- $x_0 < x_1$ için $f(x_0) < f(x_1)$ olduğundan f(x) bu aralıkta artandır.
- Artan fonksiyonun türevi pozitiftir. $f'(x) > 0$ ise f(x) artandır.

AZALAN FONKSİYON



Yandaki şekildeki gibi, artan x değerine karşılık fonksiyonun aldığı değerler azalıyorsa fonksiyon azalandır.

- $x_0 < x_1$ için $f(x_0) > f(x_1)$ olduğundan f(x) bu aralıkta azalandır.
- Azalan fonksiyonun türevi negatiftir. $f'(x) < 0$ ise f(x) azalandır.

BAZI FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1. $c \in R$ için $y = f(x) = c$ ise $y' = 0$ dır.
2. $y = c \cdot x$ ise $y' = c$ dir.
3. $y = x^n$ ise $y' = n \cdot x^{n-1}$ dir.
4. $y = a \cdot x^n$ ise $y' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ dir.
5. $f(x) = h(x) + t(x)$ ise $f' = h'(x) + t'(x)$ dir.
6. $y = f(u)$ ise $y' = f'(u) \cdot u'$ dur.
7. $[(g \circ f)(x)]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ dir.
8. $y = u^n$ ise $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ dir.
9. $y = \sqrt{u}$ ise $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ dur.
10. $y = u \cdot v$ ise $y' = u \cdot v' + u' \cdot v$ dir.
11. $y = \frac{u}{v}$ ise $y' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$ dir.

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREV

$y = f(x)$ fonksiyonu için

1. türev $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$

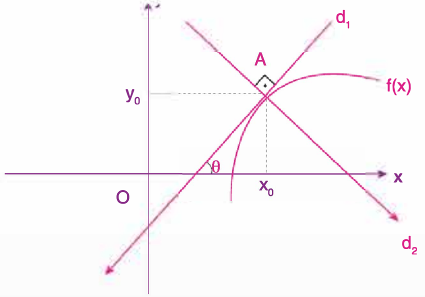
2. türev $y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$

3. türev $y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$

⋮

n inci dereceden türevi $f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$ dir.

TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU



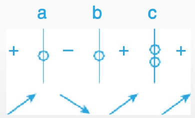
i) f(x) fonksiyonuna x_0 noktasında çizilen teğetin eğimi, f(x) in x_0 noktasındaki türevine eşittir.
$f'(x_0) = m_{d_1} = \tan\theta$ dır.

ii) f(x) fonksiyonuna teğetin değme noktasında dik olan doğruya "normal" denir. Teğet doğrusu ile normal doğrusunun eğimleri çarpımı –1 dir.
$m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1$ dir.

iii) f(x) fonksiyonunun kendisini kesmeyen bir doğruya en yakın noktası o doğruya paralel teğetinin değme noktasıdır.

BİRİNCİ TÜREVE GÖRE YEREL MAKSİMUM VE YEREL MİNİMUM

Bir fonksiyonun 1. türev fonksiyonunu sıfır yapan tek kat köklerde ekstremum noktalar vardır.
1. türevin işaret tablosu aşağıdaki gibidir.



f(x) in
i) x = a noktasında yerel maksimum
ii) x = b noktasında yerel minimum değeri vardır.
iii) x = c çift kat kök ektremum değeri yoktur.

MAKSİMUM ve MİNİMUM PROBLEMLERİ

Problem çözümünde izlenecek yol;

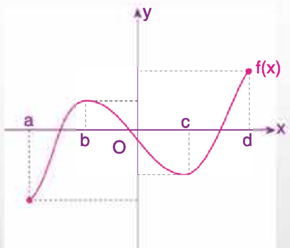
1) Verilenlere uygun olarak tek değişkenli bir fonksiyon elde edilir.
2) Elde edilen fonksiyonun türevi alınıp tablo ile ekstremum noktaları bulunur.
3) Bulunan kökler başlangıçtaki fonksiyonda yerine yazılarak maksimum veya minimum değerler bulunur.

PRATİK YOLLAR

- Toplamları sabit olan iki sayının çarpımının en büyük değeri için sayılar eşit seçilmelidir.
- Çevresi sabit olan dikdörtgenden alanı en büyük olan karedir.
- Üçgen içine çizilen dikdörtgenin alanı en çok üçgenin alanının yarısıdır.
- Genel olarak maksimum minimum problemlerinde düzgün çokgenler çözümde karşımıza çıkar.

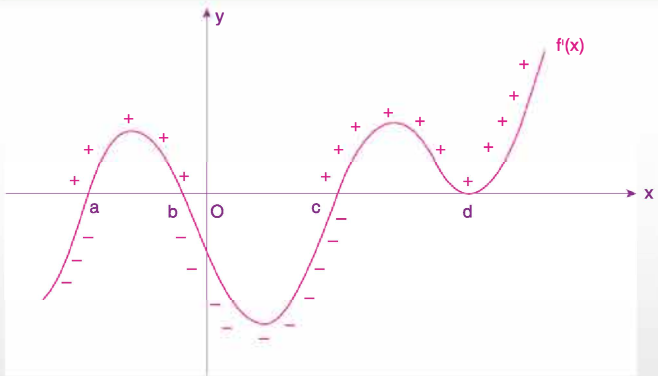
EKSTREMUM NOKTALAR

- Bir fonksiyonun artıştan azalışa veya azalıştan artışa geçtiği noktalar ekstremum noktalardır.
- Bir fonksiyonun yerel maksimum değeri, fonksiyonun belli aralıkta aldığı en büyük değerdir. Yerel minimum değeri ise belli aralıkta aldığı en küçük değerdir.



Grafikte (b, f(b)) yerel maksimum, (c, f(c)) yerel minimum noktasıdır. Ayrıca (a, f(a)) mutlak minimum, (d, f(d)) mutlak maksimum noktasıdır.

f'(x) GRAFİĞİNİN YORUMU



f'(x) in pozitif olduğu aralıklarda f(x) artan, negatif olduğu aralıklarda f(x) azalandır.

x = a ve x = c noktaları f(x) in yerel minimum noktalarıdır.

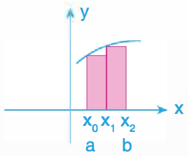
x = b noktası f(x) in yerel maksimum noktasıdır.

x = d noktası f(x) in yerel ekstremum noktası değildir.

RİEMANN TOPLAMI

Riemann toplamı bir eğrinin altındaki bölgeyi eş tabanlı dikdörtgenlere ayırarak bu eğri altındaki alanı bulmaya çalışma yöntemidir.

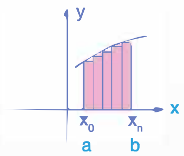
Riemann toplamı için oluşturulan dikdörtgenlerin eşit uzunluktaki taban aralıklarına alt aralıklar, bu aralıkların sınırlarının kümesine düzgün bölüntü denir.



$\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}$

$\{x_0, x_1\}$

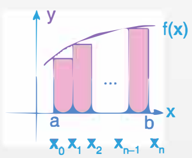
$\Delta x = \frac{b-a}{2}$



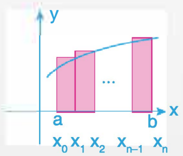
$\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{n-1}, x_n\}$

$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$



Taralı dikdörtgenlerin alanları toplamına alt toplam denir.



Taralı dikdörtgenlerin alanları toplamına üst toplam denir.

DİFERANSİYEL ve BELİRSİZ İNTEGRAL TANIMI

- $\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x) \cdot dx$ ($y = f(x)$ fonksiyonunun difarensiyeli denir.)
- $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$ dir. $F(x)$, $f(x)$ in belirsiz integralidir.
- Diferansiyel fonksiyonlardaki anlık değişimi gösterir.
- İntegral ile türev birbirinin tersi olan işlemlerdir.

BELİRSİZ İNTEGRAL KURALLARI

$F'(x) = f(x)$ $c \in R$ olmak üzere,

- $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ ise $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$
- $\int df(x) = f(x) + c$
- $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$
- $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$
- $n \neq -1$

  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int d(x) = x + c$
- $\int a\,dx = a \cdot \int dx = ax + c$
- $\int [f(x) \mp g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMİ

- $\int f^n(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$

- f ve g türevlenebilen iki fonksiyon olsun,

$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx$ integralinde $u = g(x)$ değişken değiştirmesi yapılır ve her iki tarafın diferansiyeli alınırsa

$u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$ elde edilir.

Bu durumda,

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u) \cdot du$ olur.

$\int f(u) \cdot du$ belirsiz integralinin u değişkenine göre integrali alındıktan sonra, yeniden u yerine g(x) yazılarak sonuç x değişkenine göre bulunur.

- $\int \frac{\sqrt[m]{x+a} + b}{\sqrt[n]{x+a}} dx$ ve Ekok(m, n) = k için

$x + a = u^k$ dönüşümü yapılır.

KISMİ İNTEGRASYON YÖNTEMİ

- $\int f(x) \cdot g(x)$ biçiminde iki fonksiyonun çarpımının integrali için kısmi integrasyon yöntemi kullanılır.

u ve x değişkenine bağlı diferansiyelleri alınabilen fonksiyonlar olsun.

$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

- $\int v \cdot du$ integrali $\int u dv$ integralinden daha kolay olmalıdır.

BELİRLİ İNTEGRALİN ÖZELLİKLERİ

- $\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot \int_a^b f(x)dx$

- a < c < b olmak üzere,

  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

- $\int_a^a f(x)dx = 0$

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

- f(x) çift fonksiyon ise,

  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\cdot \int_0^a f(x)dx$

- f(x) tek fonksiyon ise,

  $\int f(x)dx = 0$

F: [a, b] ⟶ r, F'(x) = f(x) integrali alınabilen fonksiyonu için,

- $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ dır.

(a: alt sınır b: üst sınır)

İntegral sabiti olan c, çıkarma işleminde sadeleştiğinde belirli integralde hesaplanmaz.

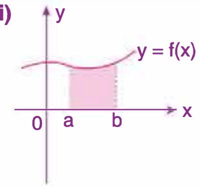
İNTEGRAL HESABININ TEMEL TEOREMİ

$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\cdot dt$ ise

$F'(x) = f(g(x))\cdot g'(x) - f(h(x))h'(x)$

İNTEGRAL İLE ALAN HESABI

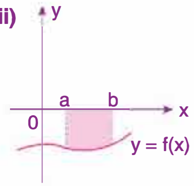
i)



y = f(x) eğrisi, x = a ve x = b doğruları ile sınırlanan ve x ekseni üzerindeki boyalı bölgenin alanı

$\int_a^b f(x)dx$ integrali ile hesaplanır.

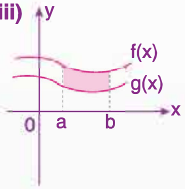
ii)



Taralı alan x ekseni altında olduğundan

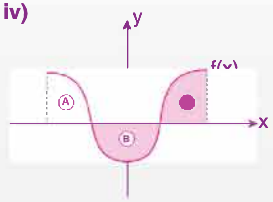
$-\int_a^b f(x)dx$ integrali ile hesaplanır.

iii)



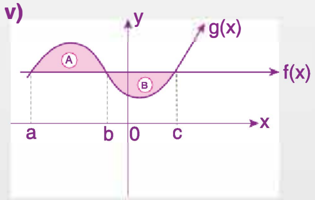
Taralı alan = $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

iv)



$A - B + C = \int_a^d f(x)dx$

v)



$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$

$B = \int_b^c [f(x) - g(x)]dx$